

Algoritma Robust Kalman Filtering untuk Sistem Waktu Kontinu yang Tidak Pasti

Budi Rudianto^{1*}, Muhafzan², Mahdhivan Syafwann³ & Syafrizal Sy⁴

¹S3 Matematika dan Sains Data Universitas Andalas, ^{2,3,4}Departemen Matematika dan Sains Data Universitas Andalas

Abstract

The Kalman Filtering algorithm is an estimation method widely used in various engineering applications, such as navigation, control, and communication systems. However, the performance of this algorithm can degrade drastically when applied to systems with model uncertainty and disturbances. This paper discusses the construction and numerical simulation of a Robust Kalman Filtering Algorithm that is able to cope with uncertainties in continuous time systems. This algorithm shows better performance compared to conventional Kalman Filtering under uncertain conditions.

Keywords: Huber Loss, Robust Kalman Filtering

(*) Corresponding Author:

e-mail: budirudianto@sci.unand.ac.id

How to Cite: Rudianto, B., Muhafizann Syafwann, M., Sy, S. (2024). *SainsMath: Jurnal MIPA Sains Terapan*, 3(1): 1-11.

PENDAHULUAN

Kalman Filtering (KF) adalah algoritma yang terkenal dan banyak digunakan untuk estimasi keadaan pada sistem dinamis yang mengalami gangguan acak. Dikembangkan oleh Rudolf E. Kalman pada tahun 1960, *Kalman Filtering* telah menjadi pondasi penting dalam berbagai aplikasi, mulai dari navigasi, pelacakan objek, hingga kontrol sistem (Chukhrova & Johannssen, 2021; Han et al., 2023). Namun, KF standar memiliki keterbatasan ketika dihadapkan pada ketidakpastian model atau non-linearitas dalam sistem (Ghion & Zorzi, 2022).

Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, berbagai variasi dari Kalman Filtering telah dikembangkan, salah satunya adalah *Extended Kalman Filtering* (EKF) (Hao et al., 2023) dan *Unscented Kalman Filtering* (UKF) (Daid et al., 2021). EKF memperluas penggunaan Kalman Filtering pada sistem non-linear dengan melakukan linearisasi di sekitar titik operasi saat ini (Hao et al., 2023). Sementara itu, UKF menggunakan transformasi *sigma point* untuk memberikan pendekatan yang lebih akurat pada sistem non-linear tanpa memerlukan linearisasi eksplisit (Z. Liu et al., 2022). Namun, kedua metode ini masih rentan terhadap ketidakpastian model (Kim et al., 2021).

Robust Kalman Filtering (RKF) adalah pendekatan yang lebih canggih yang dirancang untuk menangani ketidakpastian model dan gangguan yang lebih kompleks (Yi & Zorzi, 2022). RKF memberikan estimasi yang lebih andal dengan memodifikasi algoritma dasar Kalman Filtering untuk mempertimbangkan ketidakpastian dalam model sistem (Mary et al., 2021). Pada kondisi di mana ketidakpastian model dan gangguan pengamatan tidak dapat diabaikan, RKF menjadi pilihan yang lebih efektif dibandingkan dengan *Kalman Filtering* konvensional (Kim et al., 2021; Wang et al., 2023).

Pada makalah ini akan menguraikan model sistem dinamis yang digunakan, fungsi biaya yang dioptimalkan oleh RKF, serta langkah-langkah prediksi dan pembaruan dalam algoritma. Selain itu, kita juga akan menyajikan bukti matematis dari persamaan *steady state*, serta contoh numerik dan hasil simulasi yang menunjukkan keefektifan RKF dalam mengatasi ketidakpastian model.

Dengan adanya RKF, diharapkan dapat memberikan solusi yang lebih *robust* dan akurat dalam estimasi keadaan pada sistem dinamis yang kompleks dan tidak pasti, sehingga memperluas aplikasi praktis dari Kalman Filtering dalam bidang teknik dan ilmu pengetahuan.

METODE

Dalam makalah ini, kita mengkonstruksi algoritma RKP pada sistem waktu kontinu yang tidak pasti. Metodologi yang digunakan mencakup model sistem dinamis, formulasi fungsi biaya, langkah prediksi dan pembaruan, serta analisis *steady state*.

1. Model sistem yang digunakan untuk simulasi ini melibatkan persamaan keadaan dan persamaan pengukuran.
2. Formulasi Fungsi Biaya
Tujuan dari RKF adalah untuk meminimalkan fungsi biaya kuadrat.

Pendekatan Huber Loss (Gokcesu & Gokcesu, 2021)

Untuk mengatasi masalah diferensiabilitas, kita dapat memodifikasi kombinasi yang memberikan pendekatan paling populer untuk menggabungkan fungsi kerugian kuadrat dan absolut, sebagai berikut:

$$L_{\delta}(y, f(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y - f(x))^2, & \text{jika } |y - f(x)| \leq \delta, \\ \delta \left(|y - f(x)| - \frac{1}{2} \delta \right), & \text{jika } |y - f(x)| > \delta. \end{cases}$$

Generalisasi Huber Loss didefinisikan pada Definisi 2.

Definisi 2.1 (Gokcesu & Gokcesu, 2021). Misalkan $L(\cdot)$ sebagai suatu fungsi Huber Loss, sedemikian hingga $L: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, dimana nilai minimum terjadi di $x = 0$, dan berlaku $\arg \min_x L(x) = 0$, dan $\min_x L(x) = L(0)$.

3. Langkah Prediksi:

Pada langkah prediksi, kita memperbarui estimasi keadaan dan kovarians kesalahan. sebagai berikut:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1}, \quad (1)$$

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q. \quad (2)$$

Prediksi keadaan pada waktu k berdasarkan informasi pada waktu $k - 1$ pada persamaan (1) dinotasikan $\hat{x}_{k|k-1}$, dan $P_{k|k-1}$ adalah prediksi kovarians kesalahan.

Definisi 2.2 (B. Liu, 2010). Misalkan ξ adalah sebuah himpunan tak kosong yang tidak pasti. Maka fungsi $\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \triangleright (-\infty, x]\}$ disebut distribusi ketidakpastian dari ξ .

Teorema inversi ukuran disajikan pada Teorema 2.1

Teorema 2.1 (B. Liu, 2010) Misalkan ξ adalah sebuah himpunan tak kosong yang tidak pasti dengan ketidakpastian yang kontinu dengan distribusi ketidakpastian kontinu Φ , maka

$$\mathcal{M}\{\xi \triangleright (-\infty, x]\} = \Phi(x), \mathcal{M}\{\xi \triangleright (x, +\infty]\} = 1 - \Phi(x), \text{ untuk sebarang } x \in \mathfrak{R}.$$

Pembuktian Teorema 2.1 dapat dilihat pada (B. Liu, 2010).

Kondisi cukup dan perlu untuk distribusi ketidakpastian disajikan pada Teorema 2.2.

Teorema 2.2 (B. Liu, 2010). Sebuah fungsi $\Phi : \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$ adalah distribusi ketidakpastian dari sebuah himpunan tak tentu jika dan hanya jika fungsi tersebut adalah fungsi naik kecuali $\Phi(x) \equiv 0$ dan $\Phi(x) \equiv 1$.

Pembuktian Teorema 2.2 dapat dilihat pada (B. Liu, 2010).

4. Langkah Pembaruan:

Pada langkah pembaruan, kita menggunakan pengamatan terbaru untuk memperbarui estimasi keadaan dan kovarians kesalahan.

5. Analisis *Steady State*:

Untuk analisis steady state, kita mempertimbangkan kondisi di mana kovarians kesalahan P dan gain Kalman K mencapai nilai konstan.

6. Simulasi Numerik:

Simulasi numerik untuk memverifikasi kinerja RKF pada sistem waktu kontinu yang tidak pasti. Simulasi melibatkan langkah-langkah berikut:

- Definisi parameter sistem: matriks A , B , C , Q , dan R .
- Inisialisasi keadaan awal dan kovarians kesalahan.
- Implementasi algoritma RKF untuk estimasi keadaan.
- Evaluasi hasil estimasi terhadap keadaan sebenarnya dan analisis performa algoritma.

Dengan menggunakan metodologi yang terstruktur ini, kita dapat mengeksplorasi dan memahami bagaimana RKF bekerja dalam mengatasi ketidakpastian model pada sistem dinamis waktu kontinu, serta memvalidasi kinerjanya melalui simulasi numerik.

HASIL & PEMBAHASAN

Hasil

Pada bagian berikut disajikan konstruksi algoritma *Robust Kalman Filtering (RKF)* untuk sistem waktu kontinu yang tidak pasti memuat langkah-langkah prediksi dan pembaruan dalam algoritma. Selain itu, disajikan juga bukti matematis dari persamaan *steady state*, serta hasil simulasi numerik yang menunjukkan keefektifan RKF dalam mengatasi ketidakpastian model.

- Model sistem yang digunakan untuk simulasi ini melibatkan persamaan keadaan dan persamaan pengukuran dengan waktu kontinu sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t), \quad (3)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (4)$$

dimana vektor keadaan sistem dinotasikan $x(t)$, $u(t)$ adalah input kontrol, $y(t)$ adalah vektor pengukuran, Notasi $A(t), B(t), C(t)$ pada persamaan (3) dan (4) merupakan matriks parameter sistem yang mungkin tidak pasti, $w(t)$ adalah gangguan proses yang dimodelkan sebagai noise dengan mean nol dan kovarians Q dengan $w(t) \sim (0, Q)$, $v(t)$ adalah noise pengukuran dengan mean nol dan kovarians R , dengan $v(t) \sim (0, R)$ serta $x(0) \sim (\bar{x}_0, P_0)$, $w(t), v(t)$ dan $x(0)$ merupakan *mutually uncorrected*. Q dan R adalah matriks kovarians kesalahan.

2. Formulasi Fungsi Biaya

Tujuan dari RKF adalah untuk meminimalkan fungsi biaya kuadratik yang dinyatakan sebagai:

$$J = E \left[(x(t) - \hat{x}(t))^T P (x(t) - \hat{x}(t)) + u(t)^T R u(t) \right]. \quad (5)$$

di mana $\hat{x}(t)$ adalah estimasi dari $x(t)$, P adalah matriks kovarians kesalahan, dan $E[\cdot]$ adalah operator harapan. Fungsi biaya ini menggabungkan error estimasi dan sinyal kontrol, memungkinkan filter untuk beradaptasi secara *real-time* berdasarkan performa sistem. Maka terdapat dua langkah utama yang harus dilakukan, yaitu langkah prediksi dan langkah pembaharuan. Berikut adalah penjelasan mengenai bagaimana mendapatkan kedua langkah tersebut.

3. Langkah Prediksi

Langkah prediksi bertujuan untuk memperkirakan keadaan sistem pada waktu berikutnya x_k sebelum mendapatkan data pengamatan terbaru. Proses ini melibatkan prediksi keadaan dan kovarians kesalahan berdasarkan model sistem dinamis yang ada. Untuk membuktikan langkah prediksi pada algoritma Robust Kalman Filtering (RKF) dengan model dinamis dan fungsi biaya yang telah diberikan, kita perlu memahami bagaimana proses prediksi dilakukan secara matematis. Berikut adalah pembuktian langkah prediksi.

a. Prediksi Keadaan Sistem

Model sistem dinamis waktu kontinu yang diberikan pada persamaan (3), (4) dan Fungsi Biaya (5), maka akan ditentukan prediksi keadaan sistem dan prediksi kovarians kesalahan. Prediksi keadaan sistem $\hat{x}_{k|k-1}$ diperoleh dengan menggunakan model dinamis sistem. Pada waktu diskrit k , model ini dapat ditulis dalam bentuk diskritisasi sebagai berikut:

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}.$$

Untuk mendapatkan prediksi keadaan, kita ambil ekspektasi dari kedua sisi persamaan ini dengan asumsi bahwa ekspektasi dari gangguan w_{k-1} adalah nol:

$$E[x_k] = A_{k-1}E[x_{k-1}] + B_{k-1}u_{k-1}.$$

Karena $\hat{x}_{k|k-1} = E[x_k]$ dan $\hat{x}_{k-1|k-1} = E[x_{k-1}]$, maka prediksi dari $\hat{x}_{k|k-1}$ diformulasikan pada persamaan (6).

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1}. \quad (6)$$

Notasi $\hat{x}_{k|k-1}$ pada persamaan (6) merupakan prediksi keadaan waktu k berdasarkan informasi pada waktu $k - 1$.

b. Prediksi Kovarians Kesalahan

Kovarians kesalahan prediksi $P_{k|k-1}$ diperoleh dengan menganalisis variansi dari kesalahan prediksi. Dari model sistem, kita dapat menulis kesalahan prediksi sebagai:

$$e_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1},$$

substitusi x_k dan $\hat{x}_{k|k-1}$

$$e_{k|k-1} = (A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}) - (A_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1}),$$

$$e_{k|k-1} = A_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + w_{k-1},$$

Karena $P_{k|k-1}$ adalah ekspektasi dari kesalahan prediksi dikali transpose-nya, sehingga diperoleh:

$$P_{k|k-1} = E[e_{k|k-1}e_{k|k-1}^T],$$

sehingga

$$P_{k|k-1} = E[(A_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + w_{k-1})(w_{k-1})(A_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + w_{k-1})^T],$$

$$P_{k|k-1} = A_{k-1}E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1})^T]A_{k-1}^T + E[w_{k-1}w_{k-1}^T],$$

Jadi

$$P_{k|k-1} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1}. \quad (7)$$

Di mana $P_{k-1|k-1}$ adalah kovarians kesalahan pada waktu ke- $k - 1$ dan Q_{k-1} adalah kovarians gangguan proses.

4. Langkah Pembaruan

a. Hitung Kalman Gain

Kalman Gain K_k digunakan untuk menentukan bobot antara prediksi dan pengamatan dalam pembaruan estimasi keadaan. Kalman Gain diperoleh dengan meminimalkan fungsi biaya kuadratik. Perhatikan bahwa Fungsi Biaya:

$$J = E[(x_k - \hat{x}_{k|k})^T(x_k - \hat{x}_{k|k})].$$

Dengan estimasi keadaan $\hat{x}_{k|k}$:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1}).$$

Dimana y_k adalah pengamatan pada waktu ke- k . Error estimasi pada langkah ke- k adalah:

$$e_k = x_k - \hat{x}_{k|k}.$$

Selanjutnya, substitusi $\hat{x}_{k|k}$:

$$e_k = x_k - (\hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1})),$$

$$e_k = (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_k(y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1}),$$

karena $y_k = C_kx_k + v_k$, maka

$$e_k = (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_k(C_kx_k + v_k - C_k\hat{x}_{k|k-1}),$$

sehingga

$$e_k = (I - K_kC_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) - K_kv_k.$$

Untuk meminimalkan ekspektasi kuadrat dari error estimasi:

$$E[e_k e_k^T] = E[(I - K_kC_k)(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T(I - K_kC_k)^T + K_kv_k v_k^T K_k^T].$$

Dengan menggunakan $P_{k|k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T]$ dan $R_k = v_k v_k^T$, maka diperoleh:

$$E[e_k e_k^T] = E[(I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^T + K_k R_k K_k^T].$$

Untuk meminimalkan fungsi biaya ini, kita dapat mencari turunan parsial terhadap K_k dan menyamakannya dengan nol:

$$\frac{\partial J}{\partial K_k} = -2C_k P_{k|k-1} + 2K_k (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k) = 0,$$

$$\text{sehingga } K_k (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k) = P_{k|k-1} C_k^T,$$

$$K_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k)^{-1} \quad (8)$$

b. Perbarui Estimasi Keadaan Sistem

Estimasi keadaan diperbarui dengan menggabungkan prediksi dan pengamatan terbaru, yaitu:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}). \quad (9)$$

c. Perbarui Kovarians Kesalahan

Kovarians kesalahan diperbarui untuk mencerminkan ketidakpastian terbaru setelah pembaruan estimasi keadaan:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}). \quad (10)$$

Dengan demikian, kita telah memperoleh langkah pembaruan pada algoritma RKF yaitu:

$$K_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_{k|k} = (I - K_k C_k) P_{k|k-1}$$

Notasi K_k adalah gain Kalman, $\hat{x}_{k|k}$ adalah estimasi keadaan yang diperbarui, dan adalah $P_{k|k}$ kovarians kesalahan yang diperbarui.

5. Analisis *Steady State*:

Untuk analisis *steady state*, kita mempertimbangkan kondisi di mana kovarians kesalahan P dan gain Kalman K mencapai nilai konstan. Pada *steady state*, kovarians kesalahan P tidak berubah lagi seiring waktu. Oleh karena itu, kita dapat menggunakan persamaan aljabar Riccati untuk mencari nilai *steady state* P . Persamaan aljabar Riccati adalah:

$$P = APA^T + Q - APC^T (CPC^T + R)^{-1} CPA^T,$$

Pilih $K = PC^T (CPC^T + R)^{-1}$, sehingga

$$P = APA^T + Q - K (CPC^T + R) K^T. \quad (11)$$

Akibatnya, pada *steady state*, persamaan-persamaan di atas disederhanakan menjadi: Langkah prediksi pada *steady state* menggunakan persamaan (12).

$$P = APA^T + Q \quad (12)$$

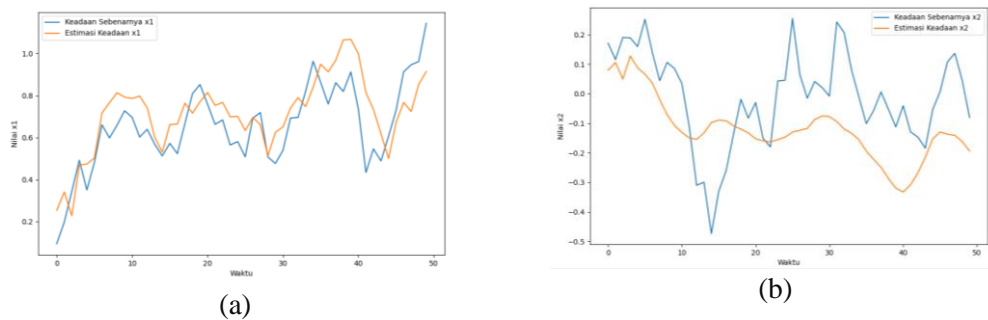
Langkah pembaruan pada *steady state* menggunakan persamaan (13) dan (14).

$$K = PC^T(CPC^T + R)^{-1} \quad (13)$$

$$P = (I - KC)P \quad (14)$$

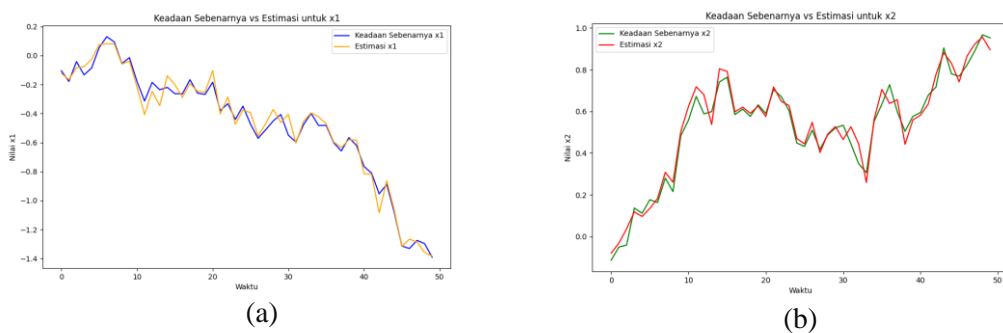
6. Simulasi Numerik

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik yang dibangkitkan secara acak dengan *Python Programming* menunjukkan bahwa RKF memiliki kinerja yang lebih baik dalam mengatasi ketidakpastian model dibandingkan dengan KF konvensional. Pada kondisi gangguan dan ketidakpastian yang tinggi, RKF mampu memberikan estimasi keadaan yang lebih akurat dan stabil. Grafik perbandingan error estimasi menunjukkan bahwa RKF secara konsisten menghasilkan error yang lebih rendah dibandingkan dengan KF konvensional. Berikut adalah beberapa hasil yang diperoleh pada beberapa waktu tertentu.



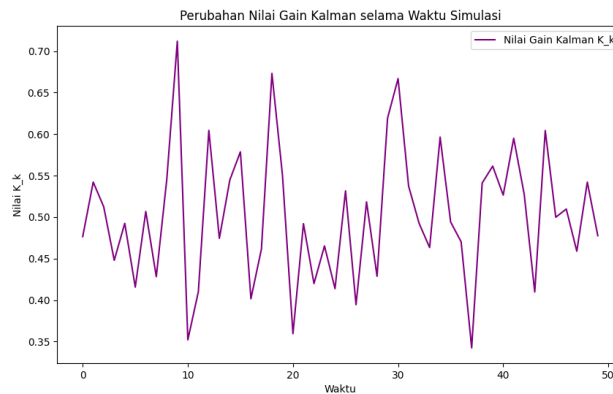
Gambar 1. (a) Nilai Estimasi Keadaan dengan x_1 (b) Nilai Estimasi Keadaan dengan x_2

Gambar 1(a) menunjukkan bahwa Estimasi x_1 mengikuti pola keadaan sebenarnya dengan baik, meskipun pada awalnya terdapat sedikit perbedaan antara estimasi dan keadaan sebenarnya. Hal ini disebabkan oleh ketidakpastian awal dan gangguan pada sistem. Namun, seiring berjalannya waktu, estimasi x_1 semakin akurat dan mendekati keadaan sebenarnya. Sedangkan pada Gambar 1(b) menunjukkan bahwa estimasi x_2 juga menunjukkan pola konvergensi yang serupa dengan x_1 . Meskipun terdapat fluktuasi pada awal simulasi, estimasi x_2 berhasil mengikuti pola keadaan sebenarnya dan menunjukkan akurasi yang baik.



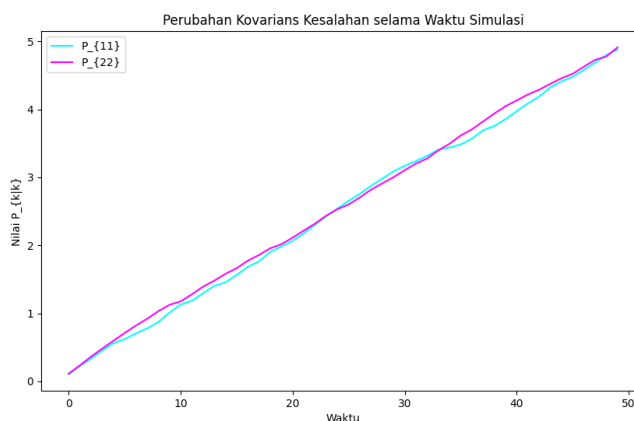
Gambar 2. (a) Nilai Estimasi Keadaan x_1 dengan Keadaan sebenarnya (b) Nilai Estimasi Keadaan x_2 dengan keadaan sebenarnya

Pada Gambar 2(a) dan 2(b) menunjukkan bahwa estimasi x_1 dan x_2 mendekati keadaan sebenarnya setelah beberapa kali simulasi. waktu. Meskipun terdapat perbedaan awal antara estimasi dan keadaan sebenarnya, RKF berhasil menyesuaikan estimasi menjadi lebih akurat dari waktu ke waktu.



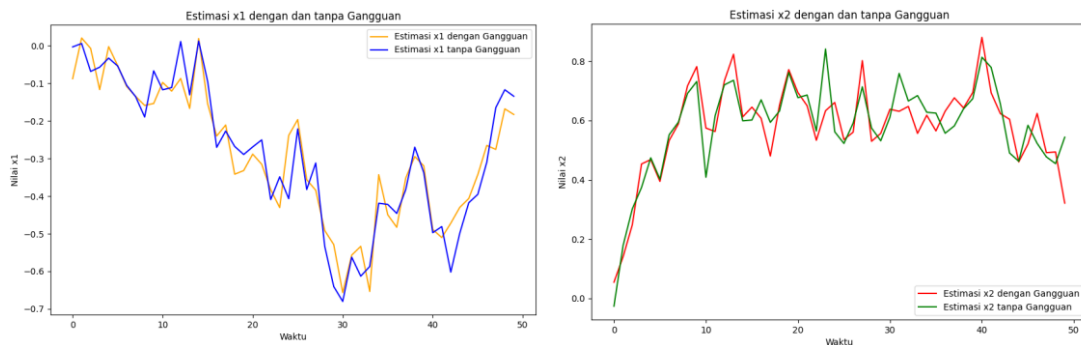
Gambar 3. Perubahan Nilai *Kalman Gain* selama waktu Estimasi

Gambar 3 menunjukkan bahwa *Kalman Gain* K_k memainkan peran penting dalam proses pembaharuan estimasi. *Kalman Gain* yang dihitung dalam setiap iterasi menentukan bobot antara prediksi dan pengamatan terbaru. Pada awal simulasi, ketika ketidakpastian tinggi, gain Kalman memberikan bobot lebih besar pada pengamatan untuk memperbaiki estimasi. Seiring dengan berjalannya waktu dan ketidakpastian berkurang, *Kalman Gain* menyesuaikan bobotnya sehingga estimasi menjadi lebih stabil.



Gambar 4. Perubahan Kovarians Kesalahan selama waktu Estimasi

Gambar 4 menunjukkan bahwa Kovarians kesalahan $P_{k|k}$ menggambarkan tingkat ketidakpastian estimasi keadaan. Pada awal simulasi, kovarians kesalahan relatif besar karena ketidakpastian awal. Namun, seiring dengan pembaruan estimasi yang dilakukan dalam setiap iterasi, kovarians kesalahan berkurang, menunjukkan bahwa estimasi semakin akurat.



Gambar 5. Robustness terhadap Ketidakpastian

Gambar 5 menunjukkan bahwa RKF menunjukkan kemampuan yang *robust* dalam menghadapi ketidakpastian model sistem dan gangguan. Hal ini terlihat dari kemampuan algoritma untuk mengoreksi estimasi keadaan meskipun terdapat gangguan dan ketidakpastian awal yang signifikan. Algoritma RKF mempertimbangkan variansi gangguan proses dan pengamatan dalam perhitungannya, sehingga menghasilkan estimasi yang lebih akurat dan stabil.

Pembahasan

1. **Performa Estimasi:** Gambar 1 dan 2 menunjukkan bahwa estimasi x_1 dan x_2 mendekati keadaan sebenarnya setelah beberapa waktu simulasi. Estimasi tersebut menggunakan pendekatan *Minimum Mean Square Error* (MMSE) melibatkan penghitungan estimator optimal yang diberikan distribusi probabilitas sebelumnya, memungkinkan estimasi yang efisien sambil mempertimbangkan ketidakpastian dalam data. Meskipun terdapat perbedaan awal antara estimasi dan keadaan sebenarnya, RKF berhasil menyesuaikan estimasi menjadi lebih akurat seiring waktu.
2. **Pengaruh Kalman Gain:** Gambar 3 menunjukkan perubahan nilai gain Kalman K_k selama waktu simulasi. Gain Kalman yang adaptif membantu RKF untuk menyesuaikan bobot antara prediksi dan pengamatan, yang memungkinkan estimasi yang lebih akurat.
3. **Kovarians Kesalahan:** Gambar 4 menunjukkan perubahan elemen-elemen diagonal dari kovarians kesalahan $P_{k|k}$. Penurunan nilai elemen diagonal menunjukkan bahwa ketidakpastian estimasi berkurang seiring waktu, yang berarti estimasi menjadi lebih andal.
4. **Robustness terhadap Ketidakpastian:** Gambar 5 menunjukkan perbandingan antara estimasi dengan gangguan dan tanpa gangguan. Meskipun adanya gangguan menyebabkan fluktuasi pada estimasi, RKF tetap mampu memberikan estimasi yang mendekati keadaan sebenarnya, menunjukkan robustness algoritma terhadap ketidakpastian dan gangguan.

Secara keseluruhan, ilustrasi grafis pada Gambar 1 hingga 5 memperkuat analisis bahwa RKF merupakan alat yang efektif untuk estimasi keadaan pada sistem dinamis yang tidak pasti. Algoritma ini berhasil mengatasi ketidakpastian dan gangguan, menghasilkan estimasi yang akurat dan stabil.

KESIMPULAN

Algoritma *Robust Kalman Filtering* merupakan peningkatan signifikan dari *Kalman Filtering* konvensional dalam kondisi ketidakpastian model pada sistem waktu kontinu. Melalui simulasi, terbukti bahwa RKF mampu memberikan estimasi yang lebih akurat dan stabil. Implementasi RKF di berbagai aplikasi teknik dapat meningkatkan kinerja sistem yang menghadapi ketidakpastian model dan gangguan. Penelitian lebih lanjut diperlukan untuk mengoptimalkan efisiensi komputasi dan memperluas aplikasi RKF dalam berbagai bidang.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih disampaikan kepada Departemen Matematika dan Sains data FMIPA Universitas Andalas. Disampaikan juga terima kasih tak terbatas kepada Prof. Muhafzan, Dr. Mahdhivan Syafwan dan Prof. Syafrizal Sy selaku Pembimbing Penulis.

REFERENSI

- Chukhrova, N., & Johannssen, A. (2021). Kalman filter learning algorithms and state space representations for stochastic claims reserving. *Risks*, 9(6). <https://doi.org/10.3390/risks9060112>
- Daid, A., Busvelle, E., & Aidene, M. (2021). On the convergence of the unscented Kalman filter. *European Journal of Control*, 57. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2020.05.003>
- Ghion, D., & Zorzi, M. (2022). Distributed Kalman filtering with event-Triggered communication: A robust approach. *2022 30th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2022*, 1, 785–790. <https://doi.org/10.1109/MED54222.2022.9837137>
- Gokcesu, K., & Gokcesu, H. (2021). *Generalized Huber Loss for Robust Learning and its Efficient Minimization for a Robust Statistics*. 1–5. <http://arxiv.org/abs/2108.12627>
- Han, T., Gois, F. N. B., Oliveira, R., Prates, L. R., & Porto, M. M. de A. (2023). Modeling the progression of COVID-19 deaths using Kalman Filter and AutoML. *Soft Computing*, 27(6). <https://doi.org/10.1007/s00500-020-05503-5>
- Hao, N., He, F., Tian, C., Yao, Y., & Xia, W. (2023). KD-EKF: A Consistent Cooperative Localization Estimator Based on Kalman Decomposition. *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, CI*, 11064–11070. <https://doi.org/10.1109/IROS55552.2023.10341604>
- Kim, S., Deshpande, V. M., & Bhattacharya, R. (2021). Robust Kalman Filtering with Probabilistic Uncertainty in System Parameters. *IEEE Control Systems Letters*, 5(1), 295–300. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2020.3001490>
- Liu, B. (2010). Uncertain Set Theory and Uncertain Inference Rule with Application to Uncertain Control. *Online*, 4(2), 83–98.
- Liu, Z., Chen, Y., & Lu, Y. (2022). Mid-State Kalman Filter for Nonlinear Problems. *Sensors*, 22(4). <https://doi.org/10.3390/s22041302>
- Mary, A. H., Miry, A. H., & Miry, M. H. (2021). System uncertainties estimation based adaptive robust backstepping control for DC DC buck converter. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 11(1), 347–355. <https://doi.org/10.11591/ijece.v11i1.pp347-355>
- Wang, R., Becker, D., & Hobiger, T. (2023). Stochastic modeling with robust Kalman filter for real-time kinematic GPS single-frequency positioning. *GPS Solutions*,

27(3), 1–17. <https://doi.org/10.1007/s10291-023-01479-5>
Yi, S., & Zorzi, M. (2022). Robust Kalman Filtering Under Model Uncertainty: The Case of Degenerate Densities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(7), 3458–3471. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3106861>