SainsMath: Jurnal MIPA Sains Terapan, Juni 2023, 2(1), 1-8
http://dx.doi.org/10.xxxx.xxxxx
p-ISSN: 2964-4720 e-ISSN: 2964-4399
Available online at https://journal.unindra.ac.id/index.php/sainsmath

Karakterisasi Keortogonalan Pythagoras di Ruang Hasil Kali Dalam

Hanafi Fulhamdi, Sisilia Sylviani, Anita Triska
Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran, Jl. Raya Bandung Sumedang KM.21, Hegarmanah, Kec. Jatinangor, Kabupaten Sumedang, Jawa Barat, 45363

**sisilia.sylviani@unpad.ac.id*

ABSTRACT

The concept of orthogonality is widely employed in different fields of study, including algebra and applications. If the inner product of two vectors in the inner product space is zero, they are said to be orthogonal or perpendicular. This is a standard orthogonality idea. However, in practice, this concept cannot always be employed in specific application issues, prompting the development of the concept of standard orthogonality. The Pythagorean orthogonality is one of its developments. This article examines Pythagorean orthogonality and its attributes. It also discussed the evolution of linear mapping problems that preserve Pythagorean orthogonality in inner product spaces.

Keywords*: linear mapping, Pythagorean, Pythagorean orthogonality, orthogonality preserving mapping*

Abstrak

Konsep keortogonalan banyak digunakan dalam berbagai lingkup studi, baik dalam lingkup aljabar maupun aplikasi. Dua buah vector di ruang hasil kali dalam dikatakan orthogonal atau tegak lurus apabila hasil kali dalam antar keduanya adalah nol. Konsep tersebut merupakan konsep keortogonalan standar. Namun pada prakteknya terkadang konsep tersebut tidak dapat digunakan dalam permasalahan aplikasi tertentu, sehingga munculah perkembangan dari konsep keortogonalan standar. Salah satu perkembangan konsep tersebut adalah keortogonalan Pythagoras. Dalam artikel ini dibahas konsep keortogonalan Pythagoras beserta sifat-sifat yang berlaku di dalamnya..

Kata Kunci: *pemetaan linear, pythagoras,keortogonalan pythagoras,*

PENDAHULUAN

Ilmu matematika sudah banyak mengalami pengembangan sampai sekarang ini, salah satunya adalah ruang vektor. Ruang vektor merupakan suatu struktur yang di dalamnya memuat elemen-elemen yang disebut dengan vektor. Ruang vektor merupakan suatu konsep dalam matematika yang telah dikembangkan selama ratusan tahun sejak konsep awalnya pertama kali dikenalkan oleh Giuseppe Piano pada tahun 1888 (Comninos, 2006). Saat ini ruang vektor telah dimanfaatkan dalam berbagai bidang, baik dalam perannya sebagai konsep yang mendukung teori-teori keilmuan lainnya maupun dalam pengaplikasiannya dalam pemecahan suatu permasalahan (Ranguwar, 2022).

Salah satu pengembangan dari struktur ruang vektor adalah ruang bernorma, yaitu suatu ruang vektor yang memiliki suatu operasi yang disebut norma di mana operasi norma tersebut memenuhi beberapa sifat yang telah ditentukan. Konsep ruang bernorma pertama kali diperkenalkan oleh Stefan Banach pada tahun 1932 dalam bukunya yang berjudul *"Theory of Linear Operations"*. Ruang bernorma menjadi topik yang sangat luas dan penting dalam matematika, dan diterapkan pada berbagai bidang, termasuk analisis fungsional, teori bilangan dan fisika matematika (Miller, 2020). Perkembangan lain dari ruang vektor adalah ruang hasil kali dalam, yaitu ruang vektor dengan operasi yang disebut hasil kali dalam. Hingga saat ini konsep tersebut banyak diaplikasikan pada banyak bidang, salah satu aplikasinya adalah Penggunaan konsep tersebut dalam menentukan kemiripan dua buah gambar berdasarkan warna-warna yang terdapat dalam gambar tersebut (Raghavan dkk., 2003).

Dalam ruang hasil kali dalam dimungkinkan untuk mengetahui besarnya sudut yang dibentuk oleh dua vektor. Dua buah vektor dikatakan tegak lurus atau ortogonal ketika hasil kali dalamnya nol. Konsep keortogonalan memiliki banyak pemanfaatan dalam berbagai bidang salah satunya adalah dalam teori persandian. Suatu sandi yang memiliki sifat ortogonal lebih mudah untuk dimodifikasi dibandingkan dengan yang tidak memiliki sifat orthogonal (Reddy dkk., 2018). Di sisi lain konsep keortogonalan telah banyak dikembangkan oleh beberapa peneliti. Terdapat beberapa jenis keortogonalan hasil pengembangan tersebut di antaranya keortogonalan Pythagoras (Ojha dkk, 2019), keortogonalan sama kaki (Ojha dkk., 2019), keortogonalan Birkhoff-James (Arambašic dkk., 2018), keortogonalan Roberts (Arambašic dkk., 2018), dan keortogonalan Bisectrix (Zamani, 2015).

Pythagoras adalah salah satu teorema dasar dalam geometri yang menyatakaan bahwa pada segitiga siku-siku jumlah kuadrat sisi-sisinya sama dengan kuadrat sisi miringnya (Abdur dkk., 2017). Vektor-vektor pada ruang vektor dikatakan ortogonal jika sudut yang terbentuk antara kedua vektor tersebut adalah 90° atau jika hasil kali titik antara kedua vektor tersebut saama dengan nol (Anton dkk., 2019). Keortogonalan Pythagoras dapat diartikan sebagai sifat di mana dua vektor orthogonal akan memiliki kuadrat yang sama dengan penjumlahan norma kuadrat masing-masing vektor.

Transformasi dapat dimaknai sebagai perubahan wujud (konstruksi, tekstur, karakter, dll.) . Istilah transformasi bermakna perubahan atau perpindahan. Secara umum, transformasi adalah pemetaan titik-titik pada bidang ke sekumpulan titik pada bidang yang sama . Adapun Transformasi linear merupakan suatu pemetaan dari satu ruang vektor ke ruang vektor lainnya yang mempertahankan operasi penjumlahan dan perkalian skalar (Anton dkk., 2019). Setiap modifikasi pada suatu objek dari konstruksi aslinya disebut sebagai transformasi. Transformasi mempunyai penerapan yang sangat luas di berbagai bidang, beberapa di antaranya dalam fisika (contohnya transformasi optik), dalam biologi (metamorfosis), dalam ilmu komputer (transformasi data), dan sebagainya (Syafnuri dkk., 2018).

Konsep Transformasi linear memiliki banyak pemanfaatan dalam berbagai bidang, salah satunya digunakan utuk menghitung skor kualitas hidup (Rahayu dkk., 2020). Contoh lainnya adalah transformasi linear dari ruang warna RGB ke ruang warna YIQ dan arah sebaliknya (Nasution, 2019). Transformasi linear juga digunakan sebagai salah satu proses dari enkripsi mode standar dari algoritma serpent yang menggunakan matriks serpent (Yogatama dkk., 2016) serta digunakan untuk mengkonstruksi suatu algoritma menyusun sebuah S-box 8 × 8 menggunakan transformasi linier fraksional yang diterapkan pada bidang Galois GF(2^8) yang menghasilkan ukuran nonlinier yang sangat tinggi (Farwa dkk., 2016), dan banyak lainnya.

Selain hal-hal yang disebut di atas, transformasi linear juga memiliki banyak pengembangan dalam lingkup matematika itu sendiri. Beberapa penelitian pengembangan tersebut diantaranya adalah pemetaan linear yang mempertahankan nilai singular terstruktur dari matriks (Costara, 2021), pemetaan linear yang mempertahankan radius numerik polinomial dari matriks (Costara, 2020), pemetaan linear yang mempertahankan pembagian Kronecker dari matriks (Hardy dkk,2018), pemetaan linear yang mempertahankan elemen aljabarik derajat 2 dari matriks, teori ini dapat memiliki aplikasi yang luas di bidang kriptografi dan pengolahan gambar (Franca dkk, 2021), pemetaan linear yang mempertahankan spektrum Lorentz pada matriks 2x2, teori ini dapat memiliki aplikasi yang luas dalam fisika relativitas dan topologi (Boeno dkk, 2022), dan masih banyak lagi.

Di sisi lain, konsep keortogonalan juga banyak dikembangkan, salah satunya adalah konsep keortogonalan Pythagoras. Keortogonalan Pythagoras dapat diartikan sebagai sifat di mana dua vektor orthogonal (tegak lurus) akan memiliki norma kuadrat yang sama dengan penjumlahan norma kuadrat masing-masing vektor.

METODE PENELITIAN

Penelitian yang disajikan pada paper ini didasari dari sebuah pertanyaan yaitu bagaimanakah sifat-sifat keortogonalan Pythagoras di ruang hasil kali dalam. Apakah sifat-sifat yang berlaku pada konsep keortogonalan standar masih berlaku sepenuhnya pada keortogonalan Pythagoras.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan V adalah suatu ruang hasil kali dalam dan s, t adalah vektor-vektor di V. Vector s dikatakan ortogonal pythagoras terhadap t ($s \perp_p t$) jika $\|s+t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$. Dalam hal ini digunakan

$$\|s\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2} = \sqrt{\langle s, s\rangle}$$

Lema 1

Misalkan s, t merupakan dua vektor di suatu ruang hasil kali dalam V maka

a. $s \perp_p t \Leftrightarrow t \perp_p s.$

b. $s \perp_p t \Leftrightarrow \alpha s \perp_p \alpha t$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.
c. $s \perp_p t \Leftrightarrow \langle s, t \rangle = 0$

Bukti:
Ambil $s, t \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ sebarang.

a. Akan ditunjukkan $s \perp_p t \Leftrightarrow t \perp_p s$.

[⇒]$s \perp_p t \Rightarrow t \perp_p s$
$s \perp_p t$ artinya $\|s + t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$
Diperoleh
$\|s + t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$
$= \|t\|^2 + \|s\|^2$
$= \|t + s\|^2$
Terbukti bahwa
$\|t + s\|^2 = \|t\|^2 + \|s\|^2$ artinya $t \perp_p s$
Maka $s \perp_p t \Rightarrow t \perp_p s$.
[⇐]$t \perp_p s \Rightarrow s \perp_p t$
$t \perp_p s$ artinya

$$\|t + s\|^2 = \|t\|^2 + \|s\|^2$$

Diperoleh
$\|t + s\|^2 = \|t\|^2 + \|s\|^2$
$= \|s\|^2 + \|t\|^2$
$= \|s + t\|^2$
Terbukti bahwa $\|s + t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$ artinya $s \perp_p t$
Maka $t \perp_p s \Rightarrow s \perp_p t$
Dengan demikian terbukti bahwa
$s \perp_p t \Leftrightarrow t \perp_p s$. ∎

b. Akan ditunjukan bahwa $s \perp_p t \Leftrightarrow \alpha s \perp_p \alpha t$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$
[⇒]$s \perp_p t \Rightarrow \alpha s \perp_p \alpha t$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$
$s \perp_p y$ artinya $\|s + y\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$
Diperoleh $\|s + t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$
$|\alpha|^2\|s + t\|^2 = |\alpha|^2(\|s\|^2 + \|t\|^2)$
$|\alpha|^2\|s + t\|^2 = |\alpha|^2\|s\|^2 + |\alpha|^2\|t\|^2$
$(|\alpha|\|s + t\|)^2 = (|\alpha|\|s\|)^2 + (|\alpha|\|t\|)^2$
$(\|\alpha(s + t)\|)^2 = (\|\alpha s\|)^2 + (\|\alpha t\|)^2$
$\|\alpha s + \alpha t)\|^2 = \|\alpha s\|^2 + \|\alpha t\|^2$, artinya $\alpha s \perp_p \alpha t$
Maka terbukti $s \perp_p t \Rightarrow \alpha s \perp_p \alpha t$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.
[⇐]$\alpha s \perp_p \alpha t \Rightarrow s \perp_p t$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$
$\alpha s \perp_p \alpha t$ artinya $\|\alpha s + \alpha t\|^2 = \|\alpha s\|^2 + \|\alpha t\|^2$
Diperoleh
$\|\alpha s + \alpha t\|^2 = \|\alpha s\|^2 + \|\alpha t\|^2$
$\|\alpha(s + y)\|^2 = \|\alpha s\|^2 + \|\alpha t\|^2$
$(|\alpha|\|s + t\|)^2 = (|\alpha|\|s\|)^2 + (|\alpha|\|t\|)^2$
$|\alpha|^2\|s + t\|^2 = |\alpha|^2\|s\|^2 + |\alpha|^2\|t\|^2$
$|\alpha|^2\|s + t\|^2 = |\alpha|^2(\|s\|^2 + \|t\|^2)$
$\|s + t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$, artinya $s \perp_p t$

Maka terbukti $\alpha s \perp_p \alpha t \Rightarrow s \perp_p t$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$

Dengan demikian $s \perp_p t \Leftrightarrow \alpha s \perp_p \alpha t$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

c. Akan ditunjukkan bahwa $s \perp_p t \Leftrightarrow \langle s,t\rangle = 0$.

[⇒]$s \perp_p t \Rightarrow \langle s,t\rangle = 0$

$s \perp_p t$ artinya $\|s+t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$

Pandang

$$\begin{aligned}
\|s+t\|^2 &= \left(\sqrt{\langle (s+t),(s+t)\rangle}\right)^2 \\
&= \langle (s+t),(s+t)\rangle \\
&= (s_1+t_1)(s_1+t_1) + (s_2+t_2)(s_2+t_2) + \cdots + (s_n+t_n)(s_n+t_n) \\
&= s_1^2 + t_1^2 + 2s_1t_1 + s_2^2 + t_2^2 + 2s_2t_2 + \cdots + s_n^2 + t_n^2 + 2s_nt_n \\
&= s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2 + t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2 + 2(s_1t_1 + s_2t_2 + \cdots \\
&\qquad + s_nt_n \\
&= \langle s,s\rangle + \langle t,t\rangle + 2\langle s,t\rangle \\
&= \left(\sqrt{\langle s,s\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle t,t\rangle}\right)^2 + 2\langle s,t\rangle
\end{aligned}$$

$\|s+t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2 + 2\langle s,t\rangle$

Subtitusikan $\|s+t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$

$\|s\|^2 + \|t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2 + 2\langle s,t\rangle$

$0 = 2\langle s,t\rangle$

$\langle s,t\rangle = 0$

Maka terbukti $s \perp_p t \Rightarrow \langle s,t\rangle = 0$.

[⇐]$\langle s,t\rangle = 0 \Rightarrow s \perp_p t$

Pandang

$$\begin{aligned}
\|s+t\|^2 &= \left(\sqrt{\langle (s+t),(s+t)\rangle}\right)^2 \\
&= \langle (s+t),(s+t)\rangle \\
&= (s_1+t_1)(s_1+t_1) + (s_2+t_2)(s_2+t_2) + \cdots + (s_n+t_n)(s_n+t_n) \\
&= s_1^2 + t_1^2 + 2s_1t_1 + s_2^2 + t_2^2 + 2s_2t_2 + \cdots + s_n^2 + t_n^2 + 2s_nt_n \\
&= s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2 + t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2 + 2(s_1t_1 + s_2t_2 + \cdots \\
&\qquad + s_nt_n \\
&= \langle s,s\rangle + \langle t,t\rangle + 2\langle s,t\rangle \\
&= \left(\sqrt{\langle s,s\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle t,t\rangle}\right)^2 + 2\langle s,t\rangle
\end{aligned}$$

$\|s+t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2 + 2\langle s,t\rangle$

Subtitusikan $\langle s,t\rangle = 0$

$\|s+t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2 + 0$

$\|s+t\|^2 = \|s\|^2 + \|t\|^2$, artinya $s \perp_p t$

Maka terbukti $\langle s,t\rangle = 0 \Rightarrow s \perp_p t$

Dengan demikian terbuti $s \perp_p t \Leftrightarrow \langle s,t\rangle = 0$. ■

SIMPULAN

Konsep keortogonalan mengalami banyak perkembangan, salah satunya adalah keortogonalan pytagoras. Beberapa sifat yang berlaku pada keortogonalan standar telah dibuktikan masih berlaku pada keortogonalan Pythagoras.

UCAPAN TERIMA KASIH

Artikel ini ditulis berdasarkan hasil penelitian dalam skema Hibah Riset Unpad Riset Persepatan Lektor Kepala dengan Nomor Kontrak “1549/UN6.3.1/PT.00/2023 Tanggal 27 Maret 2023.

DAFTAR PUSTAKA

Alsina, C., Sikorska, J., dan Tomás, M.S. (2010) ‘Norm Derivatives and Characterizations of Inner Product Spaces’, *WORLD SCIENTIFIC*, Singapore. https://doi.org/10.1142/7452

Anton, H., Rorres, C., dan Kaul, A. (2019) *Elementary Linear Algebra, 12th ed*. New York: Wiley.

Arambašic, L., Rajic, R. (2018) ‘On Birkhoff - James and Roberts orthogonality’, *Special Matrices 6*, pp. 229–236. https://doi.org/10.1515/spma-2018-0018

As’ari,Abdur Rahman dkk. (2016) *Matematika untuk SMP/MTs Kelas VIII Semester 2*. Jakarta.

Comninos, P. (2006) *Mathematical and computer programming techniques for computer graphics*. London: Springer.

Costara, Constantin (2020). *Linear maps preserving the polynomial numerical radius of matrices. Linear Algebra and its Applications, 595(), 63–71*. doi:10.1016/j.laa.2020.02.033

Costara, Constantin (2021). *Linear maps preserving structured singular values of matrices . Linear Algebra and its Applications, (), –* . doi:10.1016/j.laa.2021.03.002

Farwa,S. ,dkk. (2016).*A highly nonlinear S-box based on a fractional Linear Transformation.SpringerPlus.Volume 5*:1658

Franca,W., Alves, M. (2021). *Linear transformations preserving algebraic elements of degree 2 . Linear and Multilinear Algebra, (),* doi:10.1080/03081087.2021.1873228

Hardy, Yorick; Fošner, Ajda (2018). Linear maps preserving Kronecker quotients. Linear Algebra and its Applications, 556(), 200–209. doi:10.1016/j.laa.2018.07.021

Miller, J. (2020) ‘Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics’, *MacTutor*. Maret 2022. Tersedia di https://mathshistory.st andrews.ac.uk/Miller/mathword/ (Diakses 10 Januari 2022).

Nasution, D.S. (2019).*Perbaikan Kualitas Citra Maps Menggunakan Metode Constrast Limited Adaptive Histogram Equalization (Clahe).Komik.Volume 3*:49-56.

Ojha, B.P., dan Bajrayacharya, P.M. (2019) ‘Relation of Pythagorean and Isosceles

Orthogonality with Best approximations in Normed Linear Space', *Mathematics Education Forum Chitwan 4*, pp. 72–78. https://doi.org/10.3126/mefc.v4i4.26360

Pugh, C.C. (2015) *Real Mathematical Analysis*. Cham: Springer International Publishing.

Raghavan, V. v, Doloc-Mihu, A., dan Bollmann-Sdorra, P. (2003) 'Color Retrieval in Vector Space Model'. Tersedia di: https://www.researchgate.net/publication/2910919_Color_Retrieval_in_Vect Ve_Space_Model (Diakses: 10 Januari 2023)

Rahayu,S.M. & Suprapti, T. (2020).*Kualitas Hidup Pasien Kanker yang Menjalani Kemoterapi di Bandung Cancer Sociaty.Jurnal Wacana Kesehatan.Volume 5*.

Ranguwar, S. (2022) 'Applications of Vectors in Real Life, Engineering and Physics', *testbook*, Februari 2022. Tersedia di: https://testbook.com/learn/maths-application-of-vector/ (Diakses: 10 Januari 2023).

Reddy, K.M., Itagi, A., Dabas, S., dan Prakash, B.K. (2018) 'Image Encryption Using Orthogonal Hill Cipher Algorithm', *International Journal of Engineering & Technology*.

Roman, S. (2007) *Advanced Linear Algebra, Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer.

Saraei, A., dan Amyari, M. (2019) 'Orthogonality Preserving Mappings in Krein Spaces' Journal of Mathematical Analysis, 10(3), pp. 112–122.

Syafnuri, R.A. ,Netriwati ,Pratiwi, D.D.. (2019) *Modul Transformasi Linear dengan Model Pembelajaean Knisley*. Bandar Lampung.

Yogatama,I. ,dkk. (2016).*Pengamanan Data Video Surveillance secara Real-Time Menggunakan Enkripsidengan Algoritma Serpent.e-Proceending of Engineering.Volume 3*:2277.

Zamani,A. (2015) 'Approximately bisectrix-Orthogonality preserving mappings',Ferdowsi University of Mashhad